

Optomechatronika projekt (BMEGEMIBMOP)

Bessel- féle fókusz távolság mérés a
gyakorlatban

Konzulens: Dr. G. Szabó István-OMI

Szücs Lili

CO9L0L

2026.június

Tartalom

Bevezetés	2
Elméleti háttér	2
Mérési elrendezés	3
Mérések.....	3
Különböző hullámhosszúságú fénnel történő megvilágítás	3
Rekesz (blende) használata.....	5
Fősíkok helyzetének meghatározása kétlencsés objektív esetén	8
Összegzés.....	9

Bevezetés

Projektfeladatombként a Bessel-féle fókusz távolság mérés a gyakorlatban című projektet választottam, mely elvégzésére a KFKI OPTIKA Mérnökirodában került sor, Dr. G. Szabó István segítségével. A projekt során megismerkedtem a fókusz távolság mérés ezen fajtájával, valamint a témakör nagyságának köszönhetően több kisebb volumenű kísérletet is elvégeztem.

Elméleti háttér

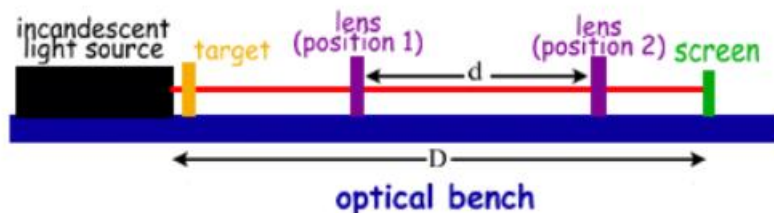
Lencsék fókusz távolságának meghatározásához számos módszer elérhető, ezek vagy matematikai, vagy kísérleti úton határozhatóak meg. Az egyik legelterjedtebb, és legegyszerűbben kivitelezhető módszer Friedrich Bessel nevéhez fűződik. A Bessel-módszer lényege, hogy egy adott lencse fókusz távolságát megismerhetjük úgy, hogy az egyéb paraméterei, például a törésmutatója, valamint a határoló felületek görbületi sugarai ismeretlenek. Eme tulajdonságnak köszönhetően a módszer alkalmazható vékony, illetve vastag lencsék, akár összetett optikai rendszerek esetén is.

A mérés egy optikai padon történik, ahol a tárgy, valamint kép helyzete rögzített, a köztük levő L távolság ismert. A lencsét addig mozgatjuk az optikai pad mentén, míg két olyan helyzetet nem találunk, ahol a tárgy képe élesen jelenik meg az ernyőn. Fontos, hogy a kiindulási L távolság nagyobb legyen, mint a feltételezett fókusz távolság négyszerese, csak így kapunk torzítatlan eredményt. A két éles helyzet közül az egyik az ernyőhöz, míg a másik a tárgyhoz van közelebb. A két, éles képet adó lencsehelyzet távolságát d -vel jelöljük. Ekkor a fókusz távolság:

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L}$$

Ha $L = 4f$, akkor a két képhelyzet egybe esik, tehát egy éles képet kapunk. A képlet levezethető a leképezési törvényből.

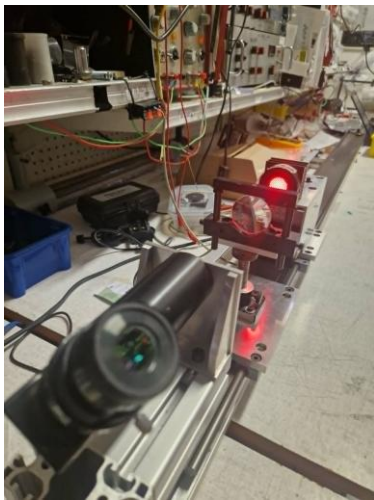
A mérés során változtatjuk az L távolságot, így az éles képek távolsága is változik, azonban a lencse fókusza állandó, ezt a kapott eredmények átlagolásával határozhatjuk meg. Mint minden mérésnél, itt is pontosabb eredményt kapunk, ha növeljük a kísérletek számát.



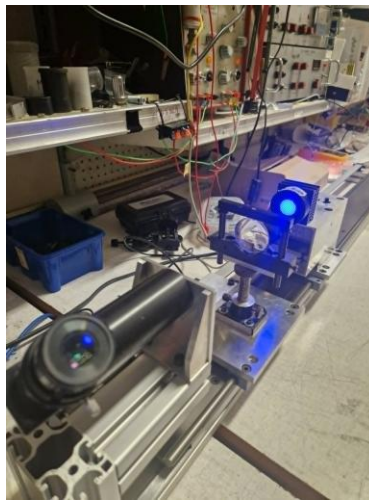
1. ábra- Optikai pad felépítése

Mérési elrendezés

A méréseket az OMI-ban található, előző évek projektmunkái által készült optikai padon végeztem. A rendszer tárgyoldalán egy háromszínű (RGB) LED-fényforrás helyezkedik el, ami lehetővé tette a különböző hullámhosszúságú fényekkel történő megvilágítást. A vizsgált lencsét egy digitális távolságmérővel felszerelt mozgatható tartóban helyeztem el, ami lehetővé tette a távolságok precíz mérését, és adott esetben a mérések reprodukálhatóságát. A képoldalon egy okulárral felszerelt megfigyelőrendszer kapott helyet, ami elősegítette a kép megfigyelését, az éles helyzetek pontos megtalálását.



2. ábra- Optikai pad, vörös megvilágítás



3. ábra- Optikai pad, kék megvilágítás



4. ábra- LED fényforrás

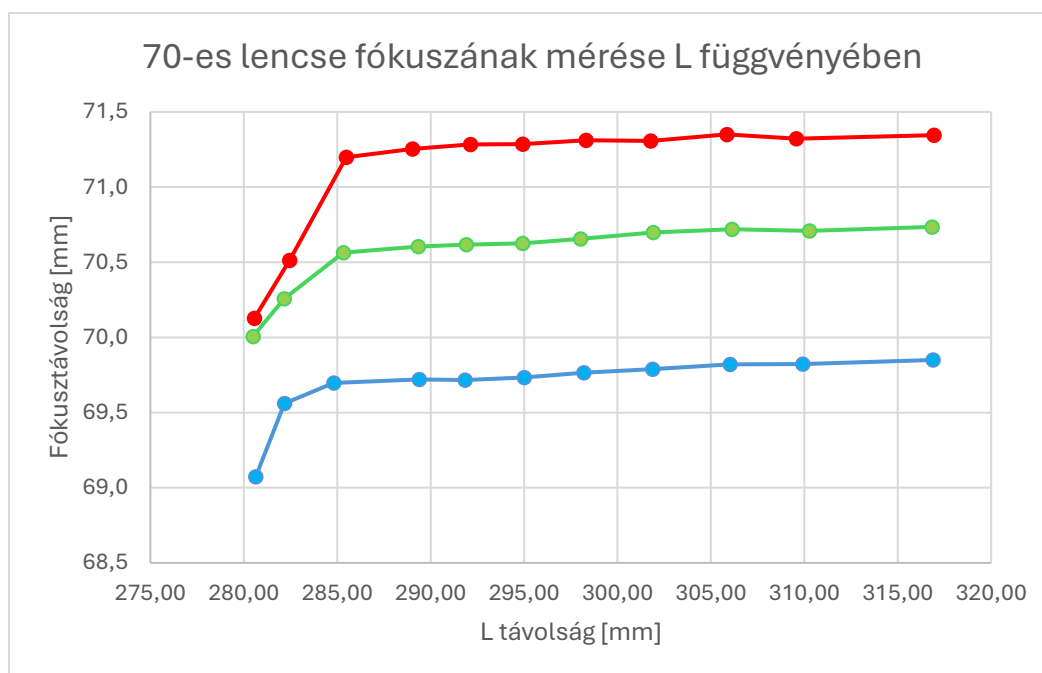
Mérések

A mérőpaddal való ismerkedés, és pár ellenőrző mérést követően, az első feladatomban egy 70 mm-es névleges fókuszú lencse fókusz távolságának változását mértem különböző hullámhosszú fényvel történő megvilágítás, valamint rekeszelés esetén.

Különböző hullámhosszúságú fényvel történő megvilágítás

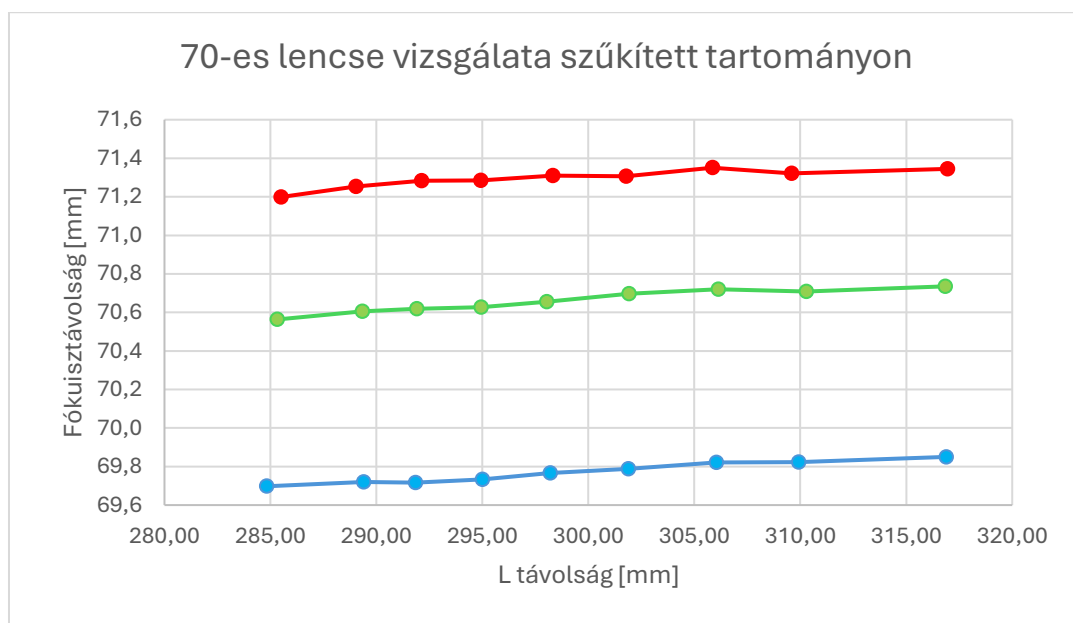
A mérés során a lencsét vörös, zöld, és kék színekkel világítottam meg a LED segítségével. Mindhárom színnel 11 mérést végeztem, ahol mérésenként változtattam az L távolság nagyságát egészen a négyszeres fókuszra. Ez tette lehetővé, hogy összehasonlítsam a kapott eredményeket, ezekből átlagot, és szórást számoljak.

Az eredmények kiértékelésének megkönnyítéséhez egy Excel táblázatot használtam, mely az L és mért d távolságok alapján kiszámította a fókusz távolságot.



5. ábra- Fókusz távolságok ábrázolása a teljes tartományon

A kapott grafikonon látszódik, hogy a névleges fókusz távolság négyszeresének közelében, azaz 280 mm-nél a mérési eredmények pontatlanok, szórásuk nagy, a mért fókusz távolság jelentősen eltér mind a névleges, mind pedig a kapott értékektől. Ennek oka, hogy itt a két éles lencsehelyzet nagyon közel van egymáshoz, szinte egybe esnek, így bármilyen pontatlanság a leolvasás során nagy relatív hibát jelent d-re nézve, ami magával hozza a fókusz távolság torzítását is. Ennek kiküszöbölésére elvettem a 280 mm-hez legközelebb eső 2 mérési pontot, így már sokkal konzisztensebb eredményt kapunk.



6. ábra- Fókusz távolságok ábrázolása a szűkített tartományon

A grafikonon megfigyelhető, hogy az L távolság növelésével a számított fókusz távolság értéke mindhárom hullámhossz esetén közel állandó marad, csupán néhány tized milliméter eltérés tapasztalható. Ez bizonyítja, hogy a Bessel-módszer stabil, és reprodukálható eredményt ad a vizsgált tartományban. Az ábra alapján a vörös megvilágítás esetén adódik a legnagyobb, kék fény esetén pedig a legkisebb fókusz távolság, míg a zöldhöz tartozó értékek középen helyezkednek el. A különbségek oka az anyag törésmutatójának fény hullámhosszától való függésében rejlik. A törésmutató a hullámhossz növekedésével általában csökken, vagyis a rövidebb hullámhosszú kék fénnel megvilágított lencse nagyobb törésmutatóval rendelkezik, mint a hosszú hullámhosszú, vörös fénnel megvilágított. A lencsekészítő képlet alapján látható, hogy a törésmutató befolyásolja a fókusz távolságot.

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

f : lencse fókusz távolsága

n : lencse anyagának törésmutatója

R : lencse felületeinek görbületi sugarai

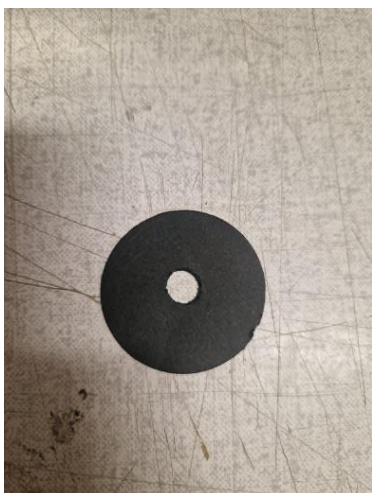
A képletből kiolvasható, hogy a törésmutató növekedésével csökken a fókusz távolság, vagyis a rövidebb hullámhossz kisebb fókusz távolságot eredményez.

Az eredményekből jól látható, hogy a vörös, zöld és kék megvilágítás esetén kapott fókusz távolságok között közel 1,5 mm eltérés figyelhető meg. Ezt a kromatikus aberráció magyarázza, hiszen a különböző színű fénysugarak nem ugyanabban a pontban egyesülnek, így eltérő fókusz síkok jönnek létre az egyes fénysugarak számára.

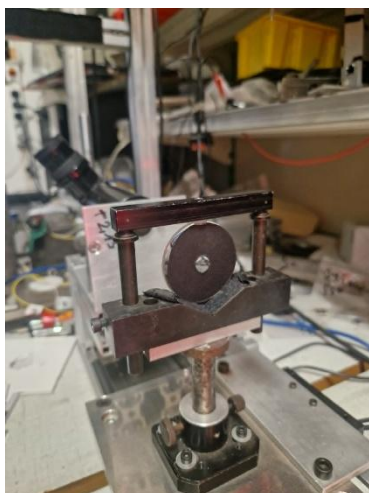
A mérési eredmények összhangban vannak az elmélettel, bár megfigyelhető eltérés a különböző hullámhosszúságok által kapott fókusz távolságokban, az eltérés viszonylag kicsi, a rendszer kromatikus hibája alacsony.

Rekesz (blende) használata

A mérés következő részében rekeszt alkalmaztam az optikai rendszerben. Ennek feladata a lencsén áthaladó fénynyaláb átmérőjének csökkentése, ezáltal a szélső sugarak kizárása. Ennek következtében csökkennek a leképezési hibák, különösen a szférikus aberráció, így az éles képhelyzetek pontosabban meghatározhatók. A blendét egy fekete kartonlapból készítettem, átmérője megegyezik a vizsgált lencse átmérőjével, és egy 10 mm átmérőjű lyukat vágtam a közepén.



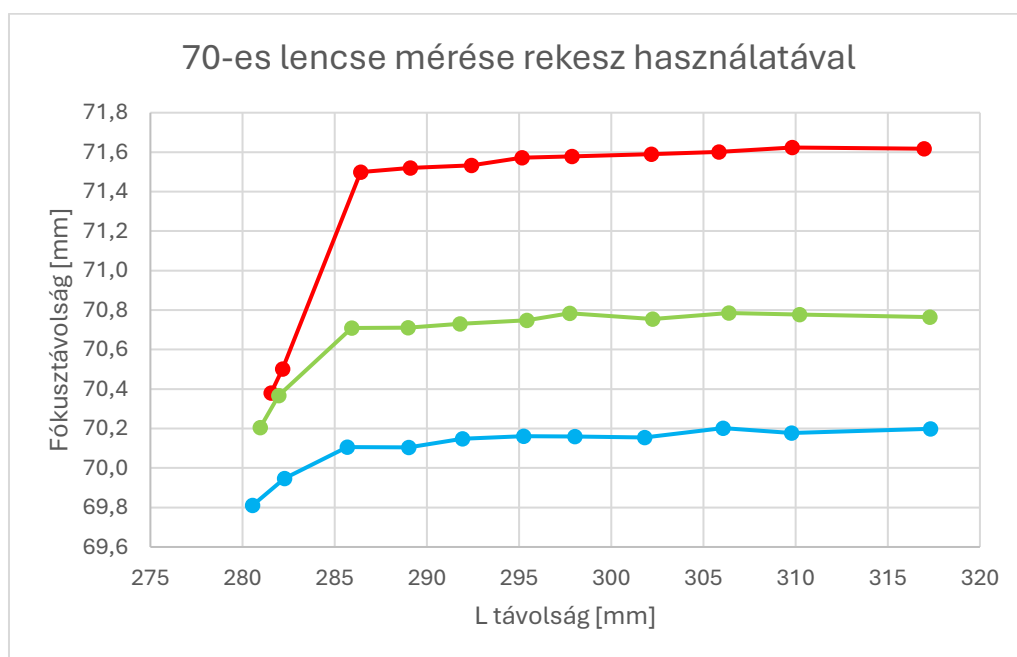
7. ábra- A rekesz



8. ábra- Rekesz a lencsére erősítve

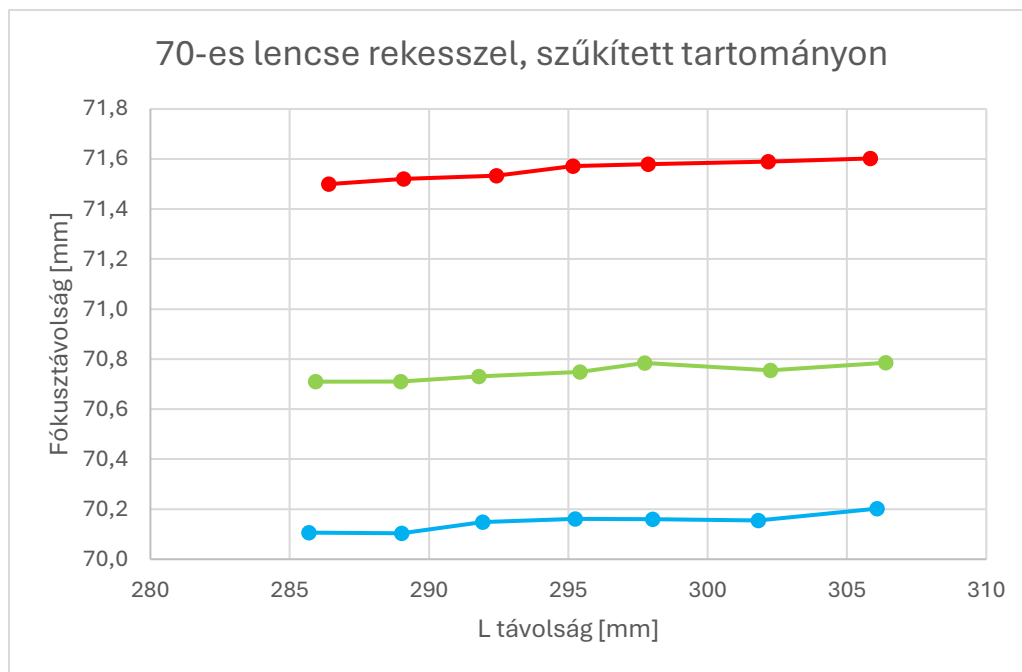


9. ábra- Az optikai pad rekesszel



10. ábra- Rekesszel mért fókusz távolság ábrázolása a teljes tartományon

A kapott ábráról leolvashatjuk, hogy bár a 280 mm-hez közeli mérési pontok eredményei még mindig eltérnek az átlagtól, ez az eltérés jelentősen csökkent a rekesz használatának köszönhetően.



11. ábra- Rekesszel mért fókusz távolság ábrázolása a szűkített tartományon

Az első méréshez hasonlóan, a koherensebb eredmények érdekében ebben az esetben is eltekintettem az első két mérési ponttól. A középső, stabilabb mérési tartományon az apertúra hatása kisebb. A kapott fókusz távolságok elfogadható hibahatáron belül megegyeznek a rekesz nélkül kapott értékekkel, vagyis a blende használata nem befolyásolja a kapott fókusz távolságot. A grafikonon látszik, hogy bár a fókusz távolságok változatlanok maradtak, a szórásuk csökkent, hiszen kizártuk a külső sugarakat, vagyis redukálódott a mérési bizonytalanság.

Alap mérés					Mérés rekesszel				
Teljes tartomány		R	G	B	Teljes tartomány		R	G	B
	Szórás	0,3870	0,2162	0,2079		Szórás	0,3389	0,1843	0,1150
	Átlag fókusz távolság [mm]	71,218	70,563	69,986		Átlag fókusz távolság [mm]	71,265	70,667	70,0064
Szűkített tartomány	Szórás	0,0446	0,0501	0,0410	Szűkített tartomány	Szórás	0,0358	0,0289	0,0317
	Átlag fókusz távolság [mm]	71,424	70,641	69,949		Átlag fókusz távolság [mm]	71,556	70,674	70,148

A táblázatot a számoló Excel segítségével készítettem, és kiolvashatóak belőle a fent leírtak, vagyis, hogy a szűkített tartományokon (négyeszeres fókusz távolságnál kicsit nagyobb L értéktől kezdve) jóval kisebbek a szórások, amiket a blende használata még tovább csökkent.

Fősíkok helyzetének meghatározása kétlencsés objektív esetén

Következő mérésenként egy 50 mm-es, és egy 75 mm-es effektív fókusz távolságú objektív fősíkjainak elhelyezkedését vizsgáltam. Egyszerű vékony lencsék esetén a leképezési törvény közvetlenül alkalmazható a lencse geometriai középpontjára, azonban összetett, több elemből álló objektívek esetén a leképezés leírásához a fősíkok fogalmát kell alkalmaznunk.

A vastag lencsék és összetett rendszerek analóg módon írhatók le, őket az első fő sík (H) és második fő sík (H') jellemzi. Ezek olyan képzeletbeli síkok, melyekből kiindulva a rendszer vékony lencseként viselkedik. A tárgytávolságot az első fő síktól, míg a képtávolságot a második fő síktól mérjük.

A vastag lencsék leírására használt képlet:

$$f = \frac{(L - \overline{HH'})^2 - d^2}{4(L - \overline{HH'})}$$

ahol L az ernyő, és tárgy távolsága, d pedig az éles képet adó lencsepozíciók különbsége.

A mérés során a fősíkok helyzete közvetlenül nem mérhető, mivel az objektív belsejében helyezkednek el, így helyzetüket közvetett módon, a Bessel-módszer által mérhető távolságok felhasználásával tudjuk meghatározni.

A kísérlet első részében az L távolságot a négyszeres és hatszoros effektív fókusz távolság közötti tartományban változtattam. Ezután következtek a számítások, ahol az adott objektívet vékony lencseként kezeltem, vagyis a fókusz távolság kiszámításához az eredeti

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L}$$

képletet alkalmaztam.

Ezzel a képlettel az 50 mm-es objektív számított átlagolt fókusz távolsága 40,5964 mm-re, míg a 75 mm-es objektívé 70, 6333 mm-re adódott. Az eredményekből látszik, hogy szimplán vékony lencse képlettel nem határozhatóak meg a fókusz távolságok.

Következő lépésben a fent említett vastag lencse képletből indultam ki, a kiértékelés során azt a fő síktávolságot ($\overline{HH'}$) keressük, ahol a mérési pontokból számított fókusz távolságok értéke a legjobban megegyeznek, vagyis ahol legkisebb a szórásuk. Ennek alapja, hogy a tárgy- és képtávolság változtatásával a fókusz távolság nem változik.

A kiértékelést szintén Excel programban végeztem, a $\overline{HH'}$ távolságot felírtam -30 mm-től egészen 30 mm-ig (az objektív méretéből kiindulva) század millimétereként változtatva, majd mind a 10 mérési ponthoz kiszámoltam az adott fő síktávolsághoz tartozó fókusz távolságot, majd ezek szórását. Az összes adat közül arra a sorra van szükségünk, ahol a szórások a legkisebbek, az ehhez tartozó $\overline{HH'}$ érték az objektívünk fősíkjainak távolsága.

A továbbiakban az 50 mm-es objektívvel mért eredményeket szemléltetem, a 75 mm-es kiértékelése hasonló módon történt.

szórás	hh'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,315093494	-30,32	51,2493	50,9655	51,4636	50,9923	51,4992	50,9168	51,5678	50,9871	51,7518	50,92
0,315041085	-30,31	51,2461	50,9622	51,4602	50,989	51,4958	50,9134	51,5643	50,9835	51,7482	50,9165
0,314988746	-30,3	51,243	50,959	51,4569	50,9857	51,4923	50,91	51,5608	50,9799	51,7445	50,9131
0,314936478	-30,29	51,2398	50,9558	51,4535	50,9823	51,4889	50,9066	51,5573	50,9763	51,7409	50,9096
0,31488428	-30,28	51,2367	50,9525	51,4502	50,979	51,4855	50,9032	51,5538	50,9727	51,7372	50,9061
0,314832153	-30,27	51,2335	50,9493	51,4468	50,9757	51,4821	50,8998	51,5503	50,969	51,7336	50,9026

12. ábra- Fősíkok távolságát számoló Excel tábla

A képen a táblázat első 6 sora látszódik, szemléltetés céljából. Az 1-től 10-ig való számozások a 10 mérési pontot jelölik. Látható, hogy a HH' távolság csökkentésével a szórás is csökken, vagyis a fókusz távolságok egyre jobban közelítenek egymáshoz.

	0,297518304	-23,88	49,212	48,8747	49,2881	48,8468	49,2777	48,7139	49,295	48,6514	49,3877	48,6595
	0,297518166	-23,87	49,2088	48,8714	49,2847	48,8434	49,2742	48,7105	49,2915	48,6478	49,3841	48,6559
	0,297518115	-23,86	49,2057	48,8681	49,2813	48,8401	49,2707	48,707	49,2879	48,6441	49,3804	48,6524
	0,297518153	-23,85	49,2025	48,8649	49,2779	48,8367	49,2673	48,7036	49,2844	48,6405	49,3767	48,6489
1	0,297518279	-23,84	49,1993	48,8616	49,2745	48,8334	49,2638	48,7002	49,2808	48,6368	49,373	48,6454

13. ábra-Fősíkok távolsága-megoldás

Mint az ábrán látszik, a legkisebb szórás a -23,86 mm fősíktávolsághoz tartozik, itt a fókusz távolságok átlaga 49, 0138 mm, ami egy 50-es effektív fókuszú objektívénél teljesen reális.

A fősíkok nem valódi fizikai elemek, hanem matematikailag definiált síkok, így adódhat, hogy a távolságuk negatív szám, vagyis nem feltétlenül ugyanabban a sorrendben helyezkednek el, mint a lencsék. Ezt a feltételezést alátámasztva lemértem az objektívet a négyszeres effektív fókusz távolságnál kisebb L értéket használva, és így is éles képet kaptam, tehát a feltételezés helyesnek bizonyult.

A fősíkok távolságának ismeretében az objektív leképezése már pontosan modellezhető, a rendszer egy ekvivalens vastag lencseként kezelhető.

Ugyanezek a lépések végig haladva, a 75 mm-es objektív fókusz távolsága 74,9903 mm-re, HH' távolsága -13,32 mm-re adódott, vagyis a fősíkok távolsága nem mutat arányosságot a fókusz távolsággal.

Összegzés

A mérések során sikeresen alkalmaztam a Bessel-módszert egy kétlencsés objektív fókusz távolságának és fősíkjainak meghatározására. A vizsgálatok során nemcsak a fókusz távolságot határoztam meg, hanem megvizsgáltam a különböző hullámhosszú megvilágítás, illetve a blende használatának hatását is. Az eredményekből jól látható volt, hogy a különböző színű fényekhez eltérő fókusz távolság tartozik, valamint az is, hogy a blende alkalmazásával a mérési eredmények szórása csökkent.

A tapasztalt jelenségek összhangban voltak a geometriai optika elméletével. A korábban matematikailag levezetett összefüggések, mint például a Bessel-képlet, a lencsék hullámhosszfüggő viselkedése vagy a fősíkok létezése, a gyakorlati mérések során is megfigyelhetők és igazolhatók voltak. Ez jól mutatja, hogy az optikai rendszerek működését leíró matematikai modellek a valóságban is jól alkalmazhatók.

A mérés során egyértelművé vált, hogy a Bessel-féle fókusz távolság mérés az egyszerű elrendezés ellenére rendkívül sokrétű módszer. Egy viszonylag egyszerű optikai pad segítségével vizsgálható a fókusz távolság, a fősíkok helyzete, a kromatikus aberráció, valamint a rekeszelés hatása is. A mérés így nemcsak a fókusz távolság meghatározásáról szólt, hanem arról is, hogy a geometriai optikában tanult elméleti összefüggések gyakorlati kísérletekkel is alátámaszthatók és bemutatathatók.